О ДВУКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ф.А.ГУЛИЕВА

Бакинский Государственный Университет

fatima_quliyeva_@mail.ru

В работе получены условия на коэффициенты одного класса операторных пучков второго порядка, которые обеспечивают двукратную полноту собственных и присоединенных векторов. При этом найдены оценки резольвенты операторного пучка в некоторых секторах. Эти условия также выражены свойствами коэффициентов операторного пучка.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H полиномиальный операторный пучок

$$P(\lambda)=\lambda^2 E+\lambda(pA+A_1)+A_2+qA^2, \tag{1}$$

где коэффициенты операторного пучка (1) удовлетворяют следующим условиям:

1) A - положительно-определенный самосопряженный оператор с вполне непрерывным обратным A^{-1}, т.е. $A^{-1}\in\sigma_\infty(H)$;

2) A_1, A_2 суть линейные операторы, причем $B_1=A_1A^{-1}$, $B_2=A_2A^{-2}$ - ограниченные операторы в H, т.е. $B_1,B_2\in L(H)$;

3) $p\in R=(-\infty,\infty)$, $q<0$ - скалярные числа.

Имеет место

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1)- 3) и оператор $qE+B_2$ имеет ограниченный обратный в H. Тогда операторный пучок $P(\lambda)$ имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. Кроме того, если $A^{-1}\in\sigma_\rho(H)$, $0<\rho<\infty$ $\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{-\rho}(A)<\infty\right)$, то резольвента представляется в виде отношения двух целых функций порядка не выше ρ и минимального типа при порядке ρ.

Доказательство. Очевидно, что

$$P(\lambda)=(qE+B_2)\left[(\lambda^2(qE+B_2)^{-1}A^{-2}+E+\lambda(qE+B_2)^{-1}(pE+B_1)A^{-1}\right]A^2=$$

$$=(qE+B_2)(E+L(\lambda))A^2, \tag{2}$$

где $L(\lambda)=\lambda(qE+B_2)^{-1}(pE+B_1)A^{-1}+\lambda^2(qE+B_2)^{-1}A^{-2}$.

Так как $E+L(0)=E$ обратим, а коэффициенты - вполне непрерывные операторы, то по лемме Келдыша [1] операторный пучок $E+L(\lambda)$ имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности.

С другой стороны, $A^{-1}\in\sigma_\rho(H)$, $(qE+B_2)^{-1}(pE+B_1)A^{-1}\in\sigma_\rho(H)$, $(qE+B_2)^{-1}A^{-2}\in\sigma_{\rho/2}(H)$, поэтому из леммы М.Г.Гасымова [2] следует, что $(E+L(\lambda))^{-1}$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка ρ и минимального типа при порядке ρ. Из (2) видно, что эти свойства относятся и к пучку $P(\lambda)$.

Лемма доказана.

Определение 1. Если ненулевой вектор φ_0 является решением уравнения $P(\lambda_0)\varphi_0=0$, то λ_0 называется собственным значением пучка $P(\lambda)$, а φ_0 - собственным вектором, отвечающим числу λ_0. Система $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ называется цепочкой векторов, присоединенных вектору φ_0, если они удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{j}P^{(j)}(\lambda_0)\varphi_{k-j}=0,\quad k=\overline{1,m},$$

Если $\{\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$ - цепочка собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственному значению λ_0, то

$$\varphi_h(t)=e^{\lambda_0 t}\left(\varphi_h+\frac{t}{1!}\varphi_{n-1}+\dots+\frac{t^h}{h!}\varphi_0\right)$$

называют элементарными решениями уравнения $P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)=0$.

Пусть

$$\varphi_h^{(\nu)}(t)\Big|_{t=0}=\varphi_h^{(\nu)},\ \nu=0,1;\quad h=\overline{0,m}.$$

Если система $\left\{\left(\varphi_h^{(0)},\varphi_h^{(1)}\right)\right\}$, построенная для всех собственных значений и собственных и присоединенных векторов полна в пространстве $\widetilde{H}=H\oplus H$, то будем говорить, что система собственных и присоединенных векторов пучка $P(\lambda)$ двукратно полна в H в смысле М.В.Келдыша.

В данной работе мы укажем некоторые достаточные условия, обеспечивающие двукратную полноту системы собственных и присоединенных векторов пучка $P(\lambda)$ в смысле М.В.Келдыша. Отметим, что аналогичные вопросы при $p=0$ рассмотрены в работах [2-5]. В работе [6] исследован случай при $p>0,q>0$.

Сперва исследуем поведение резольвенты в некоторых секторах. Имеет место

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1) - 3) и

$$\alpha = \gamma_0^{-1/2}\|B_1\| + \beta_0^{-1/2}\|B_2\| < 1, \tag{3}$$

где

$$\beta_0 = q^2,\ \ \gamma_0 = p^2 + 4|q|. \tag{4}$$

Тогда операторный пучок $P(\lambda)$ обратим на секторах

$$S_{\pm\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} = \left\{\lambda : \left|\arg\lambda \pm \frac{\pi}{2}\right| < \theta\right\}$$

при малых $\theta > 0$ и на этих секторах имеет место следующая оценка

$$\left\|\lambda^2 P^{-1}(\lambda)\right\| + \left\|A^2 P^{-1}(\lambda)\right\| \le const.$$

Доказательство. Пусть $\lambda = i\xi$, $\xi \in R = (-\infty, \infty)$. Тогда

$$P(\lambda) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda) \equiv P_0(i\xi) + P_1(i\xi) \equiv \left(-\xi^2 E + ip\xi A + qA^2\right) + \left(i\xi A_1 + A_2\right),$$

где $P_0(\lambda) = \left(\lambda^2 E + \lambda pA + qA^2\right)$, $P_1(\lambda) = \lambda A_1 + A_2$.

Так как $p \in R,\ q < 0$, то $P_0(\lambda) = (\lambda E - \omega_1 A)(\lambda E - \omega_2 A),\ \ \omega_1 < 0,\ \omega_2 > 0$.

Поэтому $P_0^{-1}(i\xi) = (\lambda\xi E - \omega_1 A)^{-1}(\lambda\xi E - \omega_2 A)^{-1}$.

Следовательно,

$$\left\|\xi^2 P_0^{-1}(i\xi)\right\| \le \sup_{\mu \ge \mu_0}\left|\xi^2\left(\xi^4 + \mu^2\left(p^2 - 2q\right)\xi^2 + q^2\mu^4\right)^{-1/2}\right| =$$

$$= \sup_{\mu \ge \mu_0}\left(\frac{\xi^4}{\xi^4 + \mu^2\left(p^2 - 2q\right)\xi^2 + q^2\mu^4}\right)^{1/2} \le \tag{5}$$

$$\le \sup_{\tau \ge 0}\left(\frac{\tau^2}{\tau^2 + (p^2 - 2q)\tau + q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \le 1.$$

С другой стороны имеет место неравенство

$$\left\|A^2 P_0^{-1}(i\xi)\right\| \le \sup_{\mu \ge \mu_0}\frac{\mu^2}{\left(\xi^4 + \mu^2\left(p^2 - 2q\right)\xi^2 + q^2\mu^4\right)^{1/2}} \le$$

$$\sup_{\mu \ge \mu_0}\left(\frac{\mu^4}{\xi^4 + \mu^2\left(p^2 - 2q\right)\xi^2 + q^2\mu^4}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{|q|}. \tag{6}$$

Таким образом, для $P_0^{-1}(\lambda)$ на мнимой оси имеет место оценка

$$\left\|\lambda^2 P_0^{-1}(\lambda)\right\| + \left\|A^2 P_0^{-1}(\lambda)\right\| \le 1 + \frac{1}{|q|} = const.$$

При $\lambda = i\xi$, $\xi \in R$, имеем:

$$P(\lambda) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda) = \left(E + P_1(i\xi)P_0^{-1}(i\xi)\right)P_0(i\xi).$$

Очевидно, что

$$\left\|P_1(i\xi)P_0^{-1}(i\xi)\right\| \le \left\|i\xi A_1 P_0^{-1}(i\xi)\right\| + \left\|A_2 P_0^{-1}(i\xi)\right\| \le \|B_1\|\left\|\xi A P_0^{-1}(i\xi)\right\| + \|B_2\|\left\|A^2 P_0^{-1}(i\xi)\right\|.$$

Так как

$$\left\|\xi A P_0^{-1}(i\xi)\right\| \le \sup_{\mu\ge\mu_0}\left|\xi\mu\left(\xi^4 + (p^2-2p)\xi^2\mu^2 + q^2\mu^4\right)^{-1/2}\right| =$$

$$= \sup_{\tau\ge 0}\left(\frac{\tau}{\tau^2 + (p^2-2q)\tau + q^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{p^2+4|q|}}, \tag{7}$$

то, используя оценки (6) и (7), получаем, что

$$\left\|P_1(i\xi)P_0^{-1}(i\xi)\right\| \le \|B_1\|\frac{1}{\sqrt{p^2+4|q|}} + \|B_2\|\frac{1}{|q|} = \alpha < 1.$$

Тогда оператор $E + P_1(i\xi)P_0^{-1}(i\xi)$ обратим и

$$P^{-1}(i\xi) = P_0^{-1}(i\xi)\left(E + P_1(i\xi)P_0^{-1}(i\xi)\right)^{-1}.$$

Следовательно, при $\lambda = i\xi$ имеем:

$$\left\|A^2P^{-1}(i\xi)\right\| + \left\|\xi^2P^{-1}(i\xi)\right\| \le \left(\left\|A^2P_0^{-1}(i\xi)\right\| + \left\|\xi^2P_0^{-1}(i\xi)\right\|\right)\cdot\left\|\left(E + P_1(i\xi)P_0^{-1}(i\xi)\right)^{-1}\right\| \le$$

$$\le\left(1+\frac{1}{|q|}\right)\frac{1}{1-\alpha} = const.$$

Теперь докажем верность этого неравенства в угловых секторах $S_{\pm\theta}$. Пусть $\lambda = i\xi e^{i\varphi}$, $|\varphi| < \theta, \xi\in R$. Тогда $P(\lambda) = \left[\left(E + (i\xi)^2P^{-1}(i\xi)\right)\left(e^{2i\varphi}-1\right) + i\xi(pE + A_1)P^{-1}(i\xi)\left(e^{i\varphi}-1\right)\right]P(i\xi)$.

Так как

$$\left\|i\xi(pA + A_1)P^{-1}(i\xi)\right\| \le \left|p + \|B_1\|\right|\left\|A\xi P^{-1}(i\xi)\right\| \le$$

$$\le \left(|p| + \|B_1\|\right)\left\|A\xi P_0^{-1}(i\xi)\cdot\left(E + P_1(i\xi)P_0^{-1}(i\xi)\right)^{-1}\right\| \le \left(|p| + \|B_1\|\right)\frac{1}{1-\alpha}\left\|A\xi P_0^{-1}(i\xi)\right\| \le$$

$$\le \left(|p| + \|B_1\|\right)\cdot\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+4|q|}} = const,$$

то при $|\varphi| < \theta$, а θ - достаточно мала, получаем, что

$$\left\|\lambda^2P^{-1}(\lambda)\right\| + \left\|A^2P^{-1}(\lambda)\right\| \le const,\ \lambda\in S_{\pm\theta}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и $A^{-1}\in\sigma_p(H)$, $0 < p \le 1$. Тогда система собственных и присоединенных векторов пучка $P(\lambda)$ двукратно полна в H.

Доказательство. Пусть $\|f_0\| + \|f_1\| \ne 0$ и вектор-функция (см. [2])

$$\left(P^{-1}(\overline{\lambda})\right)^*(f_0 + \lambda f_1) = R(\lambda)$$

голоморфна на плоскости C. Тогда по лемме 1 и по теореме Фрагмена-Линделефа $R(\lambda)$ является целой функцией порядка не выше ρ и минимального типа при порядке ρ. Так как в секторе $S_{\pm\theta}$ имеем, что $\|R(\lambda)\| \to 0$, то отсюда вытекает, что $f_0 = f_1 = 0$.

Теорема доказана.

Отметим, что если $A^{-1} \in \sigma_p(0 < \rho \le \infty)$ и $B_j \in \sigma_\infty(H)$, $j = 1,2$, то двукратная полнота системы собственных и присоединенных векторов следует из теоремы М.В.Келдыша [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН, 1971, т.26, №4, с. 15-41.
2. Гасымов М.Г. О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков // Изв.АН. Арм.ССР, сер. Математика, 1971, т.6, № 2, 3, с. 131-147.
3. Радзиевский Г.В. Квадратичный пучок операторов. Препринт. ИМ-76-24, Киев, 1976, 48 с.
4. Гасымов М.Г. К теории полиномиальных операторных пучков // ДАН СССР, 1971, т. 199, № 4, с. 747-750.
5. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка // Дифференциальные уравнения, 1992, т. 28, № 4, с. 651-661.
6. Гулиева Ф.А. О полноте собственных и присоединенных векторов одного класса операторных пучков второго порядка // Вестник БГУ, серия физико-математических наук, 2006, №4, с. 63-68.

HİLBERT FƏZASINDA BIR SİNİF İKİTƏRTİBLİ OPERATOR DƏSTƏLƏRİNİN MƏXSUSİ VƏ QOŞMA VEKTORLARININ İKİQAT TAMLIĞI HAQQINDA

F.A.QULİYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə bir sinif ikitərtibli operator dəstələrinin məxsusi və qoşma vektorlarının ikiqat tamlığını təmin edən əmsalları ilə ifadə olunan şərtlər tapılmışdır. Bununla yanaşı operator dəstəsinin rezolventası bəzi sektorlarda qiymətləndirilmişdir. Bu şərtlər də bilavasitə operator dəstəsinin əmsallarının xassələri vasitəsilə ifadə olunmuşdur.

ON TWO-FOLD COMPLETENESS OF ROOT VECTORS OF A CLASS OF SECOND ORDER OPERATOR PENCILS IN HILBERT SPACE

F.A.GULIYEVA

SUMMARY

In the paper we get conditions on coefficients of a class of second order operator pencils that provide two-fold completeness of eigen and adjoint vectors. We get the estimations of the resolvent of the operator pencil on some sector. These conditions are also expressed by the properties of the operator pencil.